6.2. WYRAŻENIE WYMIERNE

Wyrażenie wymierne wyraża się wzorem $y = \frac{W(x)}{P(x)}$, gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym.
Dziedziną wyrażenia wymiernego jest zbiór $D = \{x : P(x) \neq 0\}$

Przykład 6.2.1 Określ dziedzinę wyrażenia wymiernego:

a) $\frac{x^2 + x}{2x - 3}$

Rozwiązanie	Komentarz
Założenie: $2x - 3 \neq 0$	Kreska ułamkowa oznacza dzielenie. Ponieważ nie dzielimy przez zero , zatem mianownik musi być różny od zera.
$2x \neq 3 / : 2$ $x \neq \frac{3}{2}$ $D: x \in R \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$	Rozwiązując założenie otrzymujemy dziedzinę wyrażenia wymiernego . Dziedziną wyrażenia wymiernego są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem miejsc zerowych mianownika.

b) $\frac{x + 2}{x^2 + 3x}$

Rozwiązanie	Komentarz
Założenie: $x^2 + 3x \neq 0$	Mianownik nie może być zerem.
$a = 1; b = 3; c = 0$ $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9$ $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$ $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$ $D: x \in R \setminus \{-3, 0\}$	Aby rozwiązać założenie obliczamy miejsca zerowe mianownika korzystając ze wzorów: $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ Dziedziną wyrażenia wymiernego są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem miejsc zerowych mianownika.

Przykład 6.2.2. Oblicz wartości wyrażenia wymiernego $\frac{2-3x}{x^2-9}$ dla $x=-1$ i $x=3$.

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{2-3\cdot(-1)}{(-1)^2-9}=\frac{2+3}{1-9}=-\frac{5}{8}$	Obliczamy wartość wyrażenia wymiernego dla $x=-1$
$\frac{2-3\cdot 3}{3^2-9}=\frac{-7}{0}$ - sprzeczność Wartość wyrażenia dla $x=3$ nie istnieje.	Obliczamy wartość wyrażenia wymiernego dla $x=3$ 3 nie należy do dziedziny wyrażenia wymiernego $\frac{2-3x}{x^2-9}$.

Skracanie wyrażenia wymiernego polega na podzieleniu licznika i mianownika przez takie samo wyrażenia różne od zera.

Przykład 6.2.3. Skróć wyrażenie wymierne:

a) $\frac{15x}{5x^3}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{15x}{5x^3}{}_{/:5x}=\frac{3}{x}$	Wyrażenie wymierne skracamy przez $5x$

b) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$

Rozwiązanie	Komentarz
	Aby skrócić dane wyrażenie wymierne musimy rozłożyć na czynniki mianownik i licznik.
$x^3-3x^2=x^2(x-3)$	Rozkładając licznik x^3-3x^2 wyciągamy czynnik x^2 przed nawias.
$x^2-6x+9=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2=(x-3)^2$	Rozkładając mianownik x^2-6x+9 stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}=\frac{x^2(x-3)}{(x-3)^2}{}_{/:(x-3)}=\frac{x^2}{x-3}$	Wyrażenie $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$ skracamy przez $x-3$

c) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1}$

Rozwiązanie	Komentarz
	Aby skrócić dane wyrażenie wymierne musimy rozłożyć na czynniki mianownik i licznik.
x^2+3x+2 $a=1; b=3; c=2$ $\Delta=3^2-4\cdot1\cdot2=1$ $x_1=\dfrac{-3-1}{2}=-2$ $x_2=\dfrac{-3+1}{2}=-1$ $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$	Rozkładając licznik x^2+3x+2 korzystamy z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej. Obliczmy miejsca zerowe wyrażenia x^2+3x+2 korzystając ze wzorów $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c$ $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Ponieważ $\Delta>0$, to zapisując wyrażenie x^2+3x+2 w postaci iloczynowej stosujemy wzór $a(x-x_1)(x-x_2)$
$\underline{x^3+x^2}+\underline{x+1}=$ $=x^2(x+1)+1(x+1)=(x+1)(x^2+1)$	Rozkładając mianownik x^3+x^2+x+1 stosujemy metodę grupowania wyrazów. Wyrażenia x^2+1 nie można rozłożyć na czynniki liniowe, ponieważ $\Delta=0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$
$\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}_{/:(x+1)}=\dfrac{x+2}{x^2+1}$	Wyrażenie $\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1}$ skracamy przez $x+1$

Rozszerzanie wyrażenia wymiernego polega na pomnożeniu licznika i mianownika przez takie samo wyrażenia różne od zera.

Przykład 6.2.4. Rozszerz wyrażenie wymierne tak, aby otrzymać wyrażenie o wskazanym mianowniku:

a) $\dfrac{x-3}{2x}=\dfrac{\quad}{6x^2}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\dfrac{x-3}{2x}_{/\cdot 3x}=\dfrac{(x-3)\cdot 3x}{2x\cdot 3x}=\dfrac{3x^2-9x}{6x^2}$	Aby w mianowniku zamiast $2x$ otrzymać $6x^2$, wyrażenie $\dfrac{x-3}{2x}$ musimy rozszerzyć przez $3x$.

b) $\dfrac{2x}{2-x}=\dfrac{\qquad}{4-x^2}$

Rozwiązanie	Komentarz
$4-x^2=(2-x)(2+x)$	Aby zauważyć przez ile musimy rozszerzyć wyrażenie $\dfrac{2x}{2-x}$, mianownik $4-x^2$ rozkładamy na czynniki korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$\dfrac{2x}{2-x}_{/\cdot(2+x)}=\dfrac{2x(2+x)}{(2-x)(2+x)}=\dfrac{4x+2x^2}{4-x^2}$	Aby w mianowniku zamiast $2-x$ otrzymać $4-x^2$, wyrażenie $\dfrac{2x}{2-x}$ musimy rozszerzyć przez $2+x$.

Przykład 6.2.5. Rozszerz wyrażenia wymierne tak, aby miały jak najprostszy wspólny mianownik.

a) $\dfrac{3x}{x+1}$ i $\dfrac{x+2}{x-2}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\dfrac{3x}{x+1}_{/\cdot(x-2)}=\dfrac{3x(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{3x^2-6x}{x^2-x-2}$ $\dfrac{x+2}{x-2}_{/\cdot(x+1)}=\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}$	Najmniejszym wspólnym mianownikiem obu wyrażeń jest $(x+1)(x-2)$. Dlatego wyrażenie $\dfrac{3x}{x+1}$ rozszerzamy przez $(x-2)$, natomiast wyrażenie $\dfrac{x+2}{x-2}$ przez $(x+1)$

b) $\dfrac{3}{x^2-3x}$ i $\dfrac{5x}{9-6x+x^2}$

Rozwiązanie	Komentarz
	Aby znaleźć najmniejszy wspólny mianownik danych wyrażeń, ich mianowniki musimy rozłożyć ma czynniki
$x^2-3x=-x(-x+3)=-x(3-x)$	Rozkładając mianownik x^2-3x wyciągamy czynnik $-x$ przed nawias.
$9-6x+x^2=3^2-2\cdot3\cdot x+x^2=(3-x)^2$	Rozkładając mianownik $9-6x+x^2$ stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$\dfrac{3}{x^2-3x}=\dfrac{3}{-x(3-x)}_{/\cdot(3-x)}=\dfrac{3(3-x)}{-x(3-x)(3-x)}=\dfrac{9-3x}{-x(3-x)^2}$	Najmniejszym wspólnym mianownikiem obu wyrażeń jest $-x(3-x)^2$. Dlatego wyrażenie $\dfrac{3}{x^2-3x}$ rozszerzamy przez $(3-x)$,

$\frac{5x}{9-6x+x^2}=\frac{5x}{(3-x)^2}{}_{/\cdot(-x)}=\frac{5x\cdot(-x)}{(3-x)^2\cdot(-x)}=\frac{-5x^2}{-x(3-x)^2}$	natomiast wyrażenie $\frac{5x}{9-6x+x^2}$ przez $-x$

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 6.2.1. (1pkt.) Określ dziedzinę wyrażenia: $\frac{3x-5}{2x^2-2}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie dziedziny wyrażenia .	1

Ćwiczenie 6.2.2. (2pkt.) Dla jakich wartości parametrów a, b dziedziną wyrażenia $\frac{x-2}{x^2+ax+b}$ jest zbiór $R/\{2,3\}$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Ułożenia układu równań z niewiadomymi a, b .	1
2	Podanie a, b.	1

Ćwiczenie 6.2.3. (2pkt.) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2x^2-8}{x^2+6x+9}$ dla $x=-2$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości wyrażenia dla $x=-2$.	1

Ćwiczenie 6.2.4. (3pkt.) Skróć wyrażenie $\frac{x^2+4x+4}{3x^2-12}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Rozłożenie licznika na czynniki.	1
2	Rozłożenie mianownika na czynniki.	1
3	Podanie wyrażenia po skróceniu.	1

Ćwiczenie 6.2.5. (2pkt.) Rozszerz wyrażenie wymierne tak, aby otrzymać wyrażenie wskazanym liczniku: $\frac{x}{2x+1}=\frac{2x^2+x}{}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Rozłożenie licznika $2x^2 + x$ na czynniki.	1
2	Podanie wyrażenia po rozszerzeniu .	1